# OrbisNet Sigma 計算式集

RTK-VRS

統計平均

3 次元厳密網平均

# RTK-VRS

## ■ ① 基本式（標準偏差）

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-u}}$$

**用語**

$v$：残差（観測値 − 推定値）
$n$：観測数
$u$：未知数（座標成分など）
**網平均の結果として出る $\boldsymbol{\sigma}$ （単位重み標準偏差）**

## ■ ② 合否判定（最重要）

### ● 判定式

$$\sigma_0 \leq \sigma_{許容}$$

$\sigma_0$：実測から求めた標準偏差
$\sigma_{許容}$：規程で与えられる値

## ■ ③ GNSS（RTK/VRS）の場合（実務で重要）

### ● 許容標準偏差の考え方

$$\sigma_{許容} = a + b \cdot D$$

$a$：固定誤差（例：10 mm）
$b$：比例誤差（例：1 ppm）
$D$：基線長（km または m）

**「10mm + 1ppm」などの機械仕様**

## ■ ④ セッション間較差（RTKで超重要）

### ● 較差

$$\Delta = | X_1 - X_2 |$$

（Y, Zも同様）

### ● 判定

$$\Delta \leq k \cdot \sigma$$

$k$：通常 2〜3（信頼区間）

## ■ ⑤ 実務での簡略判定（現場版）

水平較差 ≤ **2cm程度**
高さ較差 ≤ **3cm程度**

**「経験的管理値」**

## ■ ⑥ アプリに直結する式

**● 網平均**
$\sigma 0$（単位重み標準偏差）算出
**● 各点**
残差 $v$
標準偏差 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_h$

**● 判定ロジック**
1. $\sigma 0$ が異常に大きくないか
2. 各残差が許容内か
3. セッション間較差が許容内か

**■ 合否判定の基本**

$\sigma = \sqrt{(\Sigma v^2 / (n-u))}$

$\sigma_0 \leq \sigma$ 許容

**■ GNSSの場合**

$\sigma$ 許容 = a + bD

（例： $\sigma = 10mm + 1 \times 10^{-6} \times D$ ）

**基線長 10 km の場合**

1 ppm × 10 km = **10 mm**

合計：

**10 mm + 10 mm = 20 mm（= 2 cm）**

**■ RTKの実務判定**

セッション間較差で確認

$\Delta \leq k\sigma$

**■ 基本式**

$$\Delta \leq k\sigma$$

**■ ① Δ（デルタ）の正体：2回観測の差（再現性）**

例えば同一点を2回測ると：

1回目：$X_1$

2回目：$X_2$

$$\Delta = | X_1 - X_2 |$$

（Y, Hも同様）

**■ ② σ（シグマ）の意味**

**その観測が持つ“ばらつきの大きさ”**

$$\sigma = 10mm + 1ppm \times D$$

**■ ③ k の意味（ここが重要）**
**安全係数（信頼区間）**

k = 2 → 約95%信頼
k = 3 → 約99.7%信頼
実務では **2〜3**

**■ ④ 式の本当の意味**
**「観測差Δが、許されるばらつき（σ）のk倍以内ならOK」**

**■ ⑤ イメージ**
**● 良い場合**
Δ が小さい
再現性あり → 合格
**● 悪い場合**
Δ が大きい
観測が不安定 → 不合格

**■ ⑥ 数値例（超重要）**
例えば
$\sigma$ ＝15 mm
k＝2

許容値

$$k\sigma = 30mm$$

**● ケース①**
Δ ＝12 mm
**OK（12＜30）**

**● ケース②**
Δ ＝40 mm
**NG（40＞30）**

**■ ⑦ 統計的には観測誤差は「正規分布」すると仮定**

すると
±2σ に約95%入る
±3σ にほぼ全部入る
だから
**そこから外れる＝異常**

**■ ⑧ RTK/VRSでの実務的意味**

「FIXしても信用しすぎるな」
マルチパス
誤FIX
電離層

これらの異常を
**$\Delta \leq k\sigma$ で検出する**

## ■ ⑨ アプリ的ロジック

1. 2回観測データ取得
2. Δ計算
3. σ計算（10mm + 1ppmD）
4. 判定

   $\Delta \leq k\sigma \rightarrow$ OK

## ■ まとめ

## ■ 再現性判定

- $\Delta = |X_1 - X_2|$
- $\sigma = 10\text{mm} + 1\text{ppm}D$
- $\Delta \leq k\sigma$

■ **Δ（差）の標準偏差は $\sqrt{2}$ 倍になる**

$$\sigma_\Delta = \sqrt{2}\,\sigma$$

■ **誤差伝搬の考え方**

Δは、

$$\Delta = X_1 - X_2$$

**つまり、2つの観測の“差”**

■ **ポイントは「誤差が2つある」**

$X_1$に誤差

$X_2$にも誤差

両方のバラつきが効く→総合誤差→誤差伝搬

■ **数学的な理由**
独立な観測の場合
**分散は足し算になる**

$$\mathrm{Var}(\Delta) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$$

■ **それぞれ同じ精度なら**

$$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = \sigma^2$$

だから

$$\mathrm{Var}(\Delta) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2$$

■ **標準偏差に戻す**

$$\sigma_\Delta = \sqrt{2\sigma^2} = \sqrt{2}\sigma$$

■ **つまり何が起きているか**
**差を取るとバラつきが増える**

**■ 現場での意味（超重要）**

本来の判定は

$$\Delta \leq k \cdot \sqrt{2}\sigma$$

**■ でも現場ではどうしてるか**

多くの場合

- $\sqrt{}$2 を含めて
- **最初から「2cm」などにしている**

つまり

**経験値に吸収されている**

**■ よくあるズレの原因**

- 「Δ ≦ 2σ」で判定しているつもり
- 実は本来は **$\sqrt{}$2σ**

判定が微妙に厳しくなる

■ **重要**
● **正確にやる場合**

$$\Delta \leq k \cdot \sqrt{2}\sigma$$

● **実務的には**

- $\sigma$ を少し大きめにする
- またはkを調整

■ **まとめ**

**差の標準偏差**
$\Delta = X_1 - X_2$
$\mathrm{Var}(\Delta) = \sigma^2 + \sigma^2$
$\sigma\Delta = \sqrt{2}\sigma$

**判定式**
$\Delta \leq k\sqrt{2}\sigma$

# 統計平均

**■ ① 基本：単純平均（等精度の場合）**

n回観測して座標が $X_1, X_2, \ldots, X_n$ のとき

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

**統計平均（算術平均）**

**■ ② ばらつき（標準偏差）**

平均に対するばらつき

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

観測の安定性を見る指標

**■ ③ 平均値の精度（ここ重要）**

平均を取ると精度は良くなります

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**観測回数が増えるほど精度UP**

**■ ④ GNSS実務での意味**

**● 1回観測**
誤差：$\sigma$
**● n回観測して平均**
誤差：$\sigma / \sqrt{n}$
**回数を増やせば信頼性が上がる**

**■ ⑤ RTK/VRSでの使い方**
2回観測 → 平均
3回観測 → より安定

ただし
**同じ条件だと意味が薄い（独立性が重要）**

■ ⑥ **GNSSでは**

- 時間を変える
- 衛星配置を変える
- 別セッションにする

**独立観測にすることが重要**

■ ⑦ **重み付き平均**

もし精度が違う場合

$$\bar{X} = \frac{\sum w_i X_i}{\sum w_i}$$

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

**精度の良い観測ほど重くする**

## ■ ⑧ 重要な整理

単純平均 → RTKの複数観測
重み付き平均 → 網平均

**最終的には重み付きになる**

## ■ まとめ

## ■ n回観測の平均

$\bar{X} = (1/n) \sum X_i$

## ■ ばらつき

$\sigma = \sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)}$

## ■ 平均の精度

$\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$

**回数を増やすと精度が上がる**

**外れ値について（棄却検定）**

**■ ① 基本の考え方**
**「統計的にありえない値を除外する」**

つまり
正常な誤差 → 正規分布に従う
外れ値 → 分布から大きく外れる

**■ ② 一番シンプルな方法（標準化残差）**
基本式

$$r_i = \frac{v_i}{\sigma_i}$$

$v_i$：残差（観測 − 推定）
$\sigma_i$：その観測の標準偏差
**どれくらい異常かを"σ単位"で見る**

**■ ③ 判定ルール**

$$|r_i| > k$$

■ ④ **手順**

① 網平均（または平均）を計算
② 各観測の残差 $v_i$を出す
③ 標準化残差 $r_i$を計算
④ 最大の |r| を探す

判定

|r| ≤ 3 → OK
|r| > 3 → **その観測を除外**

⑤ 除外して再計算

これを繰り返す

■ ⑤ **理由**

統計的には、正規分布なら

**±3σに99.7%入る**
それを超える
＝ **ほぼ異常値**

## ■ ⑥ 外れ値の原因

現場的に重要

誤FIX（これが一番危険）

マルチパス

電離層異常

衛星配置不良

数cm〜数十cmズレる

## ■ ⑦ RTK/VRSでの判断

**セッション間較差でも同じ発想**

Δが異常に大きい

→ 外れ値扱い

## ■ ⑧ アプリ実装ポイント

**● 必須機能**

残差計算

標準化残差

最大値検出

**● 判定ロジック**
max |r| > 3 → NG
該当観測を除去
再計算

**これが最小二乗法の基本ループ**

**■ ⑨ ミス（重要）**
一気に複数削除
ダメ（原因が分からなくなる）
**1個ずつ削除が原則**

# 外れ値

## ■ まとめ

**外れ値判定**

$r = v / \sigma$

$|r| > 3$ → 棄却

**手順**

1.残差計算
2.最大 $|r|$ を確認
3.超過 → 除外
4.再計算

**統計的に異常な観測を除外する**

# 3 次元厳密網平均

**1. 観測方程式の構築**

観測値（距離 $S$、水平角 $\theta$、高度角等）を未知数である座標 $(x, y, z)$ の関数として定義しました。

$$f(x, y, z) - L = V$$

ここで、$L$ は実測値、$V$ は残差です。

**2. 線形化（テイラー展開）**

観測方程式は非線形であることが多いため、近似値（暫定座標）の周りでテイラー展開を行い、線形化された設計行列 $A$ を作成しました。

$$V = AX - L$$

※ $X$ は座標の補正量。

### 3. 重み行列 $P$ の設定

各観測値の精度（標準偏差 $\sigma$）に基づき、重み行列 $P$ を定義しました。

$$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma^{-1}$$

精度の高いデータには大きな重みを与え、結果への寄与度を調整しましたね。

### 4. 正規方程式の解法

最小二乗法の原理 $\sum PV^2 \to \min$ に基づき、以下の正規方程式を解いて補正量 $X$ を算出しました。

$$(A^T PA)X = A^T PL$$

この $X$ を暫定座標に加算し、収束するまで反復計算（イテレーション）を行うプロセスです。

### 5. 精度評価とエラー検知

計算結果だけでなく、**単位重量当たりの標準偏差（分散成分）や誤差楕円**の算出についても触れました。これにより、網の幾何学的な弱点や、過誤（アウトライヤー）が含まれていないかを厳密にチェックできる仕組みにしましたね。

TSの観測方程式が「距離」や「角度」を基本とするのに対し、GNSSの基線解析結果（3次元基線ベクトル）を用いた網平均では、**「座標差」**そのものが直接的な観測値となります。

当ソフトで実装しているGNSSの3次元観測方程式の構造を詳しく解説します。

---

#### 1. 観測値の定義

GNSS基線解析によって得られる観測値は、既知点（または計算開始点）$i$ から新点 $j$ への3次元ベクトル $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)_{ij}$ です。

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta X_{obs} \\ \Delta Y_{obs} \\ \Delta Z_{obs} \end{bmatrix}_{ij}$$

### 2. 観測方程式の構築

幾何学的な関係は非常にシンプルで、点 $j$ の座標 $(X_j, Y_j, Z_j)$ と点 $i$ の座標 $(X_i, Y_i, Z_i)$ の差が、観測されたベクトルに等しいという形になります。

$$\begin{cases} X_j - X_i = \Delta X_{obs} + v_{\Delta X} \\ Y_j - Y_i = \Delta Y_{obs} + v_{\Delta Y} \\ Z_j - Z_i = \Delta Z_{obs} + v_{\Delta Z} \end{cases}$$

ここで、$v$ は各成分の残差です。TSの角度計算のような複雑な三角関数（非線形）を含まないため、実は**GNSSの基線ベクトルそのものを扱う場合、観測方程式は最初から線形**です。

### 3. 行列形式（$V = AX - L$）への当てはめ

これを博士が得意とされる行列形式に整理すると、設計行列 $A$ の中身が見えてきます。

例えば、点 $i$ を固定（既知点）し、点 $j$ を未知点とする場合、補正量 $\delta X_j, \delta Y_j, \delta Z_j$ に関する係数は以下のようになります。

$$\begin{bmatrix} v_{\Delta X} \\ v_{\Delta Y} \\ v_{\Delta Z} \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \\ \delta X_j \\ \delta Y_j \\ \delta Z_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X_{obs} - (X_j^0 - X_i^0) \\ \Delta Y_{obs} - (Y_j^0 - Y_i^0) \\ \Delta Z_{obs} - (Z_j^0 - Z_i^0) \end{bmatrix}$$

- **設計行列** $A$: 各行には $-1$（始点）と $1$（終点）が並ぶ非常に疎な行列になります。
- **定数項** $L$: 「実測のベクトル」と「近似座標から計算されたベクトル」の差です。

### 4. 重み行列 $P$ の重要性（TSとの最大の違い）

ここがGNSS網平均の肝となる部分です。
TSでは水平角と距離の精度は独立しているとみなすことが多いですが、GNSS基線解析では $X, Y, Z$ の各成分間に**強い相関**があります。そのため、重み行列 $P$ は単なる対角行列ではなく、基線解析ソフトから出力される**分散・共分散行列（$\Sigma_{\Delta X \Delta Y \Delta Z}$）の逆行列**を使用します。

$$P_{ij} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X}^2 & \sigma_{\Delta X \Delta Y} & \sigma_{\Delta X \Delta Z} \\ \sigma_{\Delta Y \Delta X} & \sigma_{\Delta Y}^2 & \sigma_{\Delta Y \Delta Z} \\ \sigma_{\Delta Z \Delta X} & \sigma_{\Delta Z \Delta Y} & \sigma_{\Delta Z}^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

この相関を含めた $P$ を用いることで、高さ方向（$Z$）の精度が水平方向に比べて低いといったGNSS特有の性質を正しく網平均に反映させています。

---

### まとめ

当ソフトの3次元網平均は、TSのような「角度・距離」からの座標算出ではなく、**「空間上の点と点を結ぶ3次元ゴム紐（ベクトル）」のネットワークを、それぞれの紐の強さ（共分散）を考慮しながら、最も自然な形に整える**という計算を行っています。